Méthode de Newton

Rouvière p140.

Théorème : Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ $\forall x \in [c,d]$. On considère la suite recurrente définie par $x_0 \in [c,d]$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $n \in \mathbb{N}$. En notant a l'unique 0 de f, on a :

1) $\exists \alpha > 0$, $\forall x_0 \in I = [a-\alpha, a+\alpha]$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a de manière quadratique : i.e $\exists C > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$

2) Si de plus, $f''(x) > 0$ $\forall x \in [c,d]$, alors $\forall x_0 \in]a,d]$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et $x_{n+1} - a \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$.

Preuve :

Existence de a : f est continue sur $[c,d]$. De plus, $f(c) < 0 < f(d)$ donc f est strictement croissante sur $[c,d]$ donc d'après le TVI, $\exists ! a \in]c,d[$, $f(a) = 0$.

1) On pose $F : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$. On a $F(a) = a$ et $F'(a) = 0$.

Soit $x \in [c,d]$, on a $F(x) - a = x - a - \frac{f(x) - \overset{=0}{f(a)}}{f'(x)} = \frac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)}$

Or $f \in \mathcal{C}^2$ donc on peut effectuer un developpement de Taylor :

$f(a) = f(x) + (a-x)f'(x) + \frac{(a-x)^2}{2} f''(z)$ $z \in]a,x[$

Ainsi, $F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(a-x)^2$

f est bornée et atteint ses bornes donc en posant $C = \frac{\max_{x\in[c,d]} |f''(x)|}{2\min_{x\in[c,d]} |f'(x)|}$.

On a bien $|F(x) - a| \leq C|x-a|^2$ pour $x \in [c,d]$

Soit $\alpha > 0$, tel que $C\alpha < 1$ et assez petit pour que $I = [a-\alpha, a+\alpha] \subset [c,d]$

Si $x \in I$, alors $|F(x) - a| \leq C|x-a|^2 \leq C\alpha^2 \leq \alpha$ d'où $F(I) \subset I$.

Prenons $x_0 \in I$, on a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in I$ et $|x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$

d'où par recurrence on a $C|x_n - a| \leq (C|x_0 - a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (x_n) converge vers a de manière quadratique

2) Soit $x \in [a,d]$. Par hypothèse f' est croissante et f est convexe sur $]c,d[$

On a de plus : $\forall x \in [a,d]$, $f(x) \geq 0$ et $f'(x) > 0$ d'où

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x \quad (\text{inégalité stricte si } x > a) \ (*)$$

$$\text{et } F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2 \geq 0 \quad \text{d'après } (1) \quad (\text{strict si } x > a)$$

Donc $F([a,d]) \subset [a,d]$.

Soit $x_0 \in]a,d]$, alors $a \leq x_n \leq d$ et d'après $(*)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement $\searrow$

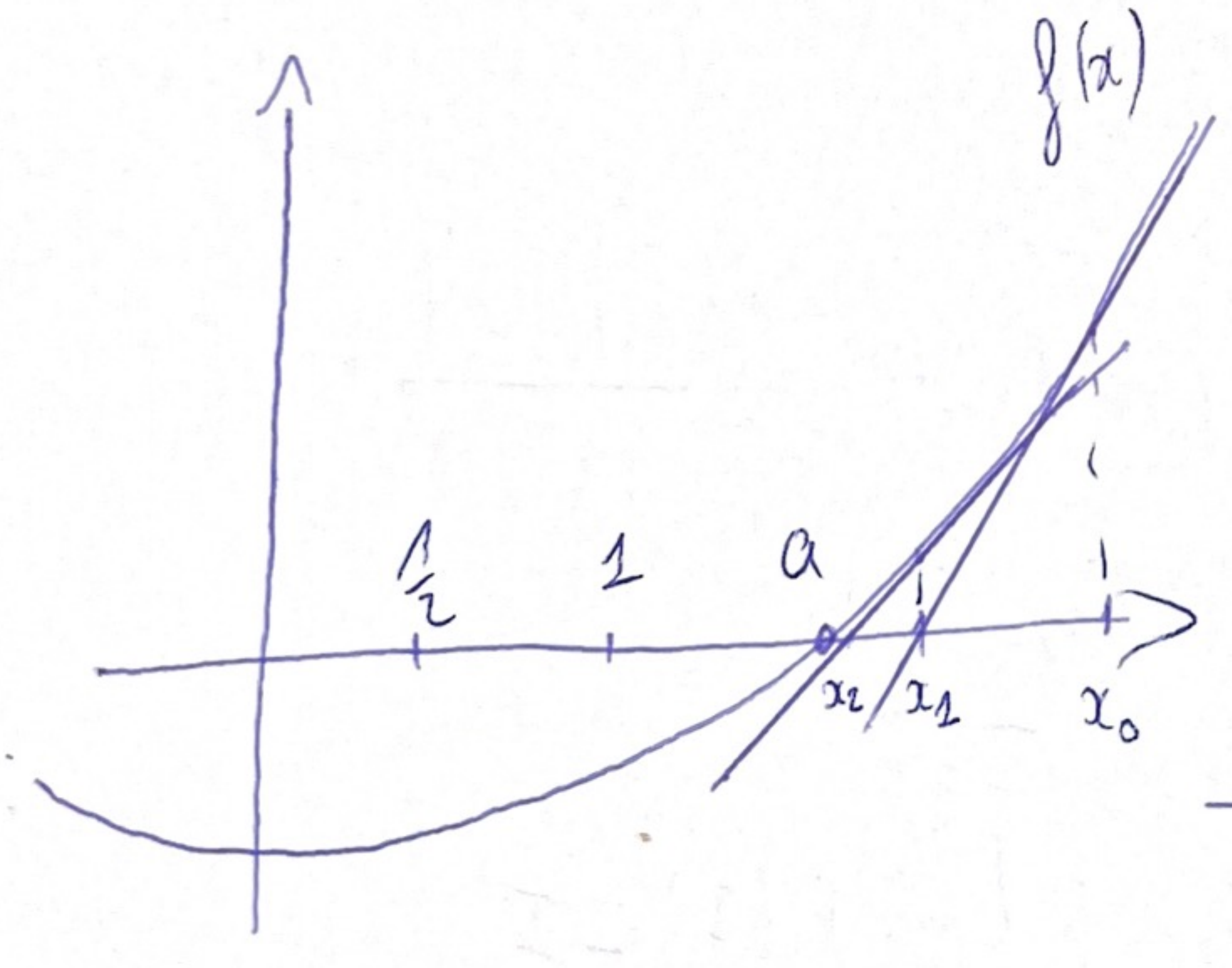
Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l qui vérifie $F(l) = l$ donc $f(l) = 0 \Rightarrow l = a$
car a est unique

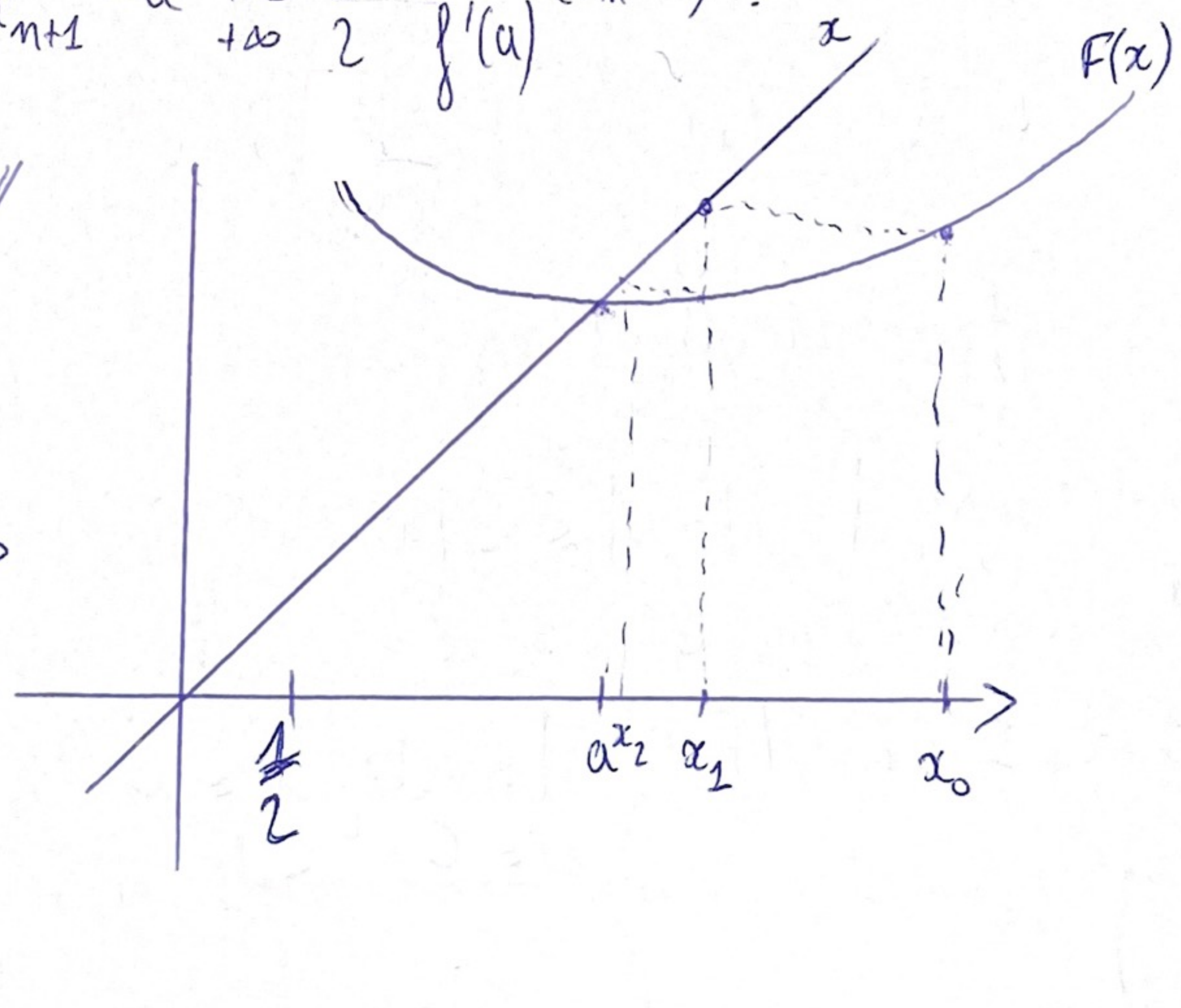
Or on a : $0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$. et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)} \quad \text{avec } a < z_n < x_n$$

Ainsi, lorsque $n \to +\infty$, on a $\dfrac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} \sim \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(a)}{f'(a)}$

$$\text{D'où } x_{n+1} - a \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2.$$





$f(x) = x^2 - x - 1$